

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f ορισμένη στο X_m . Το P_n^* είναι βση της f ορισμένης στο X_m στο χώρο P_n αν ν υπάρχει ένα εναλλασσόμενο σύνολο X_{n+2}^* για τη σωάρωση σφάλμα:

$$e(x) = f(x) - P_n^*(x), \text{ αποσπιδούμενο από ν+2 σημεία του } X_m$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ)

Η βση P_n^* της f ορισμένης στο X_m , στον P_n καλ μοναδική

$$E_n(f, X_m) = \|f - P_n^*\| = \max_{x \in X_m} |f(x) - P_n^*(x)| < \max_{x \in X_m} |f(x) - p(x)| = \|f - p\|, \forall p \in P_n, p \neq P_n^*$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f \in C[a, b]$ και P_n^* η βση της f στον P_n τότε υπάρχει σνολο εναλλασσόμενων σημείων $X_{n+2}^* \subset [a, b]$ για τη σωάρωση σφάλμα $e = f - P_n^*$ τω

$$E_n(f; [a, b]) = E_n(f; X_{n+2}^*) = \|f - P_n^*\| < \|f - p\|, \forall p \in P_n, p \neq P_n^*$$

Επιπλέον, αν X_{n+2} είναι ένα άλλο σνολο σημείων του $[a, b]$ τότε:

$$E_n(f; X_{n+2}) = \min_{p \in P_n} \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - p(x)| = \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - P_n^*(X_{n+2}; x)| \leq E_n(f, [a, b]) = E_n(f, X_{n+2}^*) = \|f - P_n^*\|$$

Αν $P_n^*(X_{n+2}) \neq P_n^*$ τότε η ανισότητα είναι αυστηρή

Απόδ

Εστω $P_n^*(X_{n+2}) \neq P_n^*$ τότε $E_n(f; X_{n+2}) = \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - P_n^*(X_{n+2}; x)| <$
 $< \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - P_n^*(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n^*(x)| = \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - P_n^*(x)| =$
 $= E_n(f, [a, b]) = E_n(f, X_{n+2}^*)$
 Αν $P_n^* = P_n^*(X_{n+2})$ τότε όλοι οι ανισότητες γίνονται ισότητες

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f ορισμένη στο σύνολο X_m και P_n^* η βολή της f στον P_n . Τότε υπάρχει αναλλασύμενο σύνολο σημείων $X_{n+2} \subset X_m$ για τη σάρωση σφάλμα $e = f - P_n^*$ των
 $E_n(f, X_m) = E_n(f, X_{n+2}) = \|f - P_n^*\|$, $\forall p \in P_n$ με $p \neq P_n^*$
 Επιπλέον, αν X_{n+2} είναι ένα άλλο σύνολο σημείων των X_m τότε
 $E_n(f; X_{n+2}) = \min_{P \in P_n} \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - P(x)| = \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - P_n^*(X_{n+2}; x)|$
 $\leq E_n(f, X_m) := E_n(f, X_{n+2}^*)$

Αν $P_n^*(X_{n+2}) \neq P_n^*$ τότε η ανισότητα γίνεται αυστηρή
 Ανακρίση (ιδία με πριν).

ΕΥΡΕΣΗ P_n^* βολή της f ορισμένης στο σύνολο X_{n+2}

Εστω $P \in P_{n+2}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία του X_m $f(x_i) = P(x_i)$, $x_i \in X_{n+2} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\}$
 Από τον τύπο Lagrange είναι: $p(x) = \sum_{j=1}^{n+2} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} f(x_i)$
 Ορίσω ως $w(x) = \prod_{i=1}^{n+2} (x - x_i)$

και

Τότε $p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{w(x)}{x - x_i} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}$, $w'(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+2} (x - x_j)$

$w'(x_k) = \prod_{j=1}^2 (x_k - x_j)$

Συντελεστής του μεγιστο βαθμού όρου x^{n+1} είναι ο
 $\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}$. Εάν $\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} = 0$ τότε το $p(x) \in P_n$

Επομένως $p(x)$ θα είναι η βολή της f στον P_n
 με σφάλμα $\max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - p(x)| = 0$

Έστω
$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $l_{n+1} \in P_{n+1}$ τέ

$$l_{n+1}(x_i) = (-1)^i, \quad x_i \in X_{n+2}$$

ως πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $(-1)^i$

γράφεται ως :

$$l_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{w(x)}{x-x_i} \cdot \frac{(-1)^i}{w'(x_i)}$$

Ο συντελεστής του x^{n+1} είναι
$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{w'(x_i)}$$

$$\begin{aligned} w'(x_i) &= (x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{n+2}) = \\ &= (x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdots (x_{n+2} - x_i) (-1)^{n+2-i} \\ &= |w'(x_i)| (-1)^{n+2-i} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{|w'(x_i)| \cdot (-1)^{n+2-i}} = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{|w'(x_i)|} (-1)^{2i-n+2} = (-1)^n \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{|w'(x_i)|} \neq 0$$

όρα έχουμε πολυώνυμο $n+1$ βαθμού

Θεωρούμε τώρα την παύση

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{w'(x_i)}} \quad \text{Τότε το πολυώνυμο}$$

$$q = p - \lambda l_{n+1} \in P_n$$

Παρατηρούμε επίσης ότι για τη συνάρτηση σφάλτος

$e = f - q$ ισχύει :

$$\begin{aligned} e(x_i) &= f(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - (p(x_i) - \lambda l_{n+1}(x_i)) = \\ &= \lambda l_{n+1}(x_i) = \lambda (-1)^i \end{aligned}$$

Επομένως, q είναι η βση της f στον P_n

ορισμένης στο X_{n+2} αφού το X_{n+2} αποτελεί

εναλλακόμενο σωμαίο $(\lambda(-1)^i)$, το μέγ σφάλτος

$$E_n(f; X_{n+2}) = |\lambda|$$

Άσκηση 3 (σελ. 45)

Να βρεθεί η βοή της f ορισμένη στο X_4 , στον P_1 όπου

$$X_4 = \{-1, 0, 1, 2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|c|c|c} X_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Λύση

Θεωρούμε τα σύνολα σημείων $X_{4,1} = \{-1, 0, 1\}$, $X_{4,2} = \{-1, 0, 2\}$, $X_{4,3} = \{-1, 1, 2\}$ και $X_{4,4} = \{0, 1, 2\}$

Πρέπει να δούμε τι σημαία δίνουν το καθένα από τα σύνολα

Στο $X_{4,1}$:

$$W'(-1) = (-1-2)(-1-1) = 2$$

$$W'(0) = (0-(-1))(0-1) = -1$$

$$W'(1) = (1-(-1))(1-0) = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{f(X_i)}{W'(X_i)}}{\sum_{i=1}^3 \frac{(-1)^i}{W'(X_i)}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{0}{-1} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Στο $X_{4,2}$:

$$W'(-1) = (-1-0)(1-2) = 3$$

$$W'(0) = (0-(-1))(0-2) = -2$$

$$W'(2) = (2-(-1))(2-0) = 6$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{0}{-2} + \frac{4}{6}}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{-2} + \frac{-1}{6}} = -1 \Rightarrow | -1 | > | -\frac{1}{2} | \quad (\text{πιθανό εργαζομ. σημείο})$$

Στο $X_{4,3}$:

$$W'(-1) = (-1-1)(-1-2) = 6$$

$$W'(1) = (1-(-1))(1-2) = -2$$

$$W'(2) = (2-(-1))(2-1) = 3$$

$$\lambda_3 = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{-2} + \frac{4}{3}}{-\frac{1}{6} + \frac{1}{-2} + \frac{-1}{3}} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow |\lambda_3| = |\lambda_2| \quad (\text{πιθανό εργαζομ. σημείο})$$

$x_{4,4}$:

$$w'(0) = (0-1)(0-2) = 2$$

$$w'(1) = (1-0)(1-2) = -1$$

$$w'(2) = (2-0)(2-1) = 2$$

$$\lambda_4 = \frac{\frac{0}{2} + \frac{1}{-1} + \frac{4}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{2}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P_1^*(x) &= P(x) - \lambda_4 w_4(x) = (x-0)(x-2) \cdot \frac{1}{3} + (x+1)(x-0) \cdot \frac{4}{6} - \\ &- (-1)(x(x-2) \cdot \frac{-1}{3} + (x+1)(x-2) \cdot \frac{1}{-2} + (x+1)x \cdot \frac{-1}{6}) = \\ &= (-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6})x + 1 = x+1 \quad \text{το βέλτιστο πολυώνυμο} \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$e(-1) = f(-1) - P_1^*(-1) = 1 - (-1+1) = 1$$

$$e(0) = f(0) - P_1^*(0) = 0 - (0+1) = -1$$

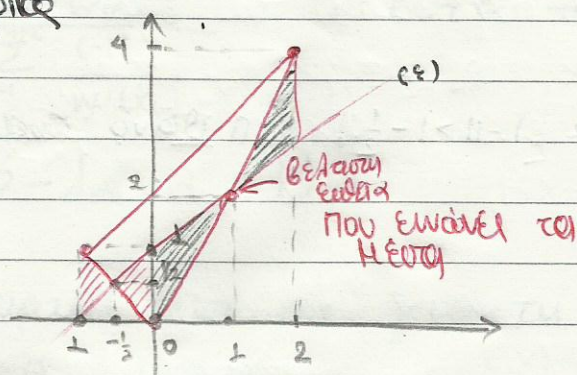
$$e(1) = f(1) - P_1^*(1) = 1 - (1+1) = -1$$

$$e(2) = f(2) - P_1^*(2) = 4 - (2+1) = 1$$

Δύο εναλλακτικά σκετά.

β' τρόπο (εύρεση του $P_1^*(x)$)

γεωμετρικά



$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f_1+f_2}{2}\right), \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{f_2+f_3}{2}\right) \leftarrow \text{Ευθεία που περνά από αυτά}$$

$$(E) \quad y - \frac{f_1+f_2}{2} = \frac{\frac{f_2+f_3}{2} - \frac{f_1+f_2}{2}}{\frac{x_2+x_3}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}} \left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$\text{Έτσι, } P_1^*(x) = y = \frac{1}{2} + \frac{3/2}{3/2} \left(x - \frac{1}{2}\right) = x+1$$